GESCHIEDENIS VAN DE WISKUNDE

1 	11 	21 	31 	41 	51 
2 	12 	22 	32 	42 	52 
3 	13 	23 	33 	43 	53 
4 	14 	24 	34 	44 	54 
5 	15 	25 	35 	45 	55 
6 	16 	26 	36 	46 	56 
7 	17 	27 	37 	47	57
8	18	28	38	48	58
9	19	29	39	49	59
10	20	30	40	50	

TIJDLIJN

.

Oudere Stenen Tijdperk (Paleolithicum)	590000 - ±7000 v. Chr.	-weinig verschil tussen mens en hogere dieren -voedsel door jacht of visserij -begin van taal\ -begin van tellen -grotschilderingen -stenen voorwerpen
Nieuwere Stenen Tijdperk (Neolithicum)	±7000 v. Chr. - ±3500 v. Chr.	-voedsel door jacht, visserij, landbouw, veeteelt -nomadische volkeren ontwikkelen zich tot primitieve boeren -*éé*nvoudige omgang met getallen: tellen met handen en voeten, knopen in een touw, stenen en schelpen
Bronstijd	±4000 v. Chr. - ±1200 v. Chr.	- gebruik van metalen voorwerpen -de wiskunde uit Egypte, waar wij naar kijken -de wiskunde uit Mesopotamie, waar wij naar kijken
Yzertijd	vanaf ±1200 v. Chr.	

1



1 *werd gemaakt onder LinuX met* LaTeX *en* LyX

HET BEGIN

.

1) Heel lang geleden, in het tijdperk, welke we het *Paleolithicum* noemen (het *Oudere Stenen Tijdperk*), bestond er weinig verschil tussen de levenswijze van de mens en die van de hogere dieren. Men leefde van jacht en visserij.

In de honderdduizenden jaren van dit tijdperk (*590.000 - 7000 v. Chr.*) begon de ontwikkeling van de mens. Ze leerden vuur te gebruiken. Er ontstond taal en er ontstond een zeer *één*voudig getalbegrip. Er zijn grotschilderingen gevonden die in die tijd gemaakt zijn.





In het *Neolithicum (het Nieuwere Stenen Tijdperk 7000 v. Chr. - 3500 v. Chr.)* leefden mensen van jacht en visserij, en ook van landbouw en veeteeld. Er waren nomadische volkeren die ophielden al zwervend naar voedsel te zoeken en zich ontwikkelden tot primitieve boeren, die ook nog wel jaagden of visten, maar die zich zo lang de bodem vruchtbaar bleef op *één* plek bleven. Ze begonnen woningen te bouwen om zich tegen het weer of de aanvallen van rovers te beschermen. Veel van die woningen uit het Neolithicum zijn door opgravingen aan het licht gekomen en komen nog steeds aan het licht, ook in Nederland. Uit die opgravingen blijkt dat zich in die nederzettingen langzamerhand eenvoudige vormen van handwerk, zoals pottenbakkerij, timmermanswerk en weverij ontwikkelden. Er kwamen stapelplaatsen van koren, zodat het mogelijk was voorraden te verzamelen voor de winter of voor slechte tijden. Men bakte brood, men brouwde bier, en in latere perioden van het Neolithicum begon men koper en brons te gebruiken voor sieraden en gebruiksartikelen. Van de vele en belangrijke uitvindingen uit die tijden moeten we speciaal het wagen- en pottenbakkerswiel vermelden. Het tempo van de uitvindingen, vergeleken met dat van het Oudere Stenen Tijdperk, was snel aan het toenemen .

Tussen de dorpen ontstond handel, die heel omvangrijk kon worden. Men kan handelsbetrekkingen aantonen tussen gebieden die honderden kilometers van elkaar af lagen. De ontdekking van het bewerken en smelten van ertsen[2] en het daaruit voortkomende gebruik, eerst van koper, dan van brons, en nog later van ijzer, heeft die handelsbetrekkingen zeer in de hand gewerkt. Dit bevorderde ook de ontwikkeling van de taal. Oorspronkelijk drukten de woorden zeer concrete[3] dingen uit.

[2] erts : delfstof, die metaal bevat

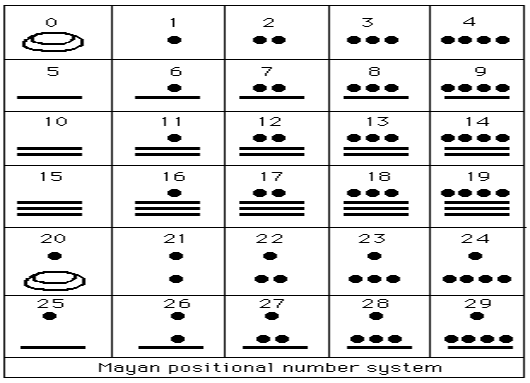
[3] concrete dingen : werkelijk bestaande dingen (brood, paard etc.)

2) Aangezien getallen behoren tot de meest abstracte[4] ideeén die de menselijke geest kan vormen, kwamen speciale uitdrukkingen voor getallen slechts langzaam in gebruik. Aanvankelijk droegen die uitdrukkingen eerder een kwalitatief[5] dan een kwantitatief[6] karakter, omdat men slechts onderscheid maakte tussen *éé*n twee en veel. (of beter gezegd *éé*n man, twee mannen of veel mannen) In sommige oude talen kun je dit eerste eenvoudige gebruik van getallen nog terugvinden b.v. in het Oud-Grieks of Keltisch (b.v. Grieks : an*è*r, man; andre, twee mannen) Het getal twee is hier nog aan een voorwerp gekoppeld. Wanneer dan de behoefte ontstaat het getalbegrip uit te breiden, worden grotere getallen aanvankelijk door optelling gevormd, b.v. drie door twee en *éé*n , vier door twee en twee op te tellen.

Hier volgt een voorbeeld ontleend aan sommige Australische stammen:

Murray River: 1 = enea, 2 = petcheval, 3 = petcheval-enea,
4 = petcheval-petcheval
Kamilaroi: 1 = mal, 2 = bulan, 3 = guliba, 4 = bulan-bulan,
5 = bulan-guliba, 6 = guliba-guliba

Door de ontwikkeling van het handwerk en de handel werd deze groei van het getalbegrip sterk bevorderd. Getallen werden gerangschikt en gebundeld tot grotere eenheden, en daarbij werd vaak van de vingers van een hand of van beide handen gebruik gemaakt, iets dat bij de handel heel natuurlijk is. Zo kwam het getal vijf en daarmee ook tien als hogere eenheid in gebruik en door deze werden weer andere getallen door optelling en aftrekking verkregen, b.v. twaalf als tien plus twee, of negen als tien minus *éé*n. We vinden ook wel 20, het aantal vingers en tenen (of van de handen tweemaal) als basis in gebruik. W.C. Eels, die 307 getalsystemen van Amerikaanse volkeren heeft onderzocht, vond 146 systemen decimaal, en 106 op 5, 10 of 20, of op combinaties daarvan, berustend. Het vigesimale stelsel (dus dat stelsel dat op de basis 20 berust) komt voor bij de Maya's in Mexico en bij de Kelten in Europa.



20 - tallig stelsel van de Maya's

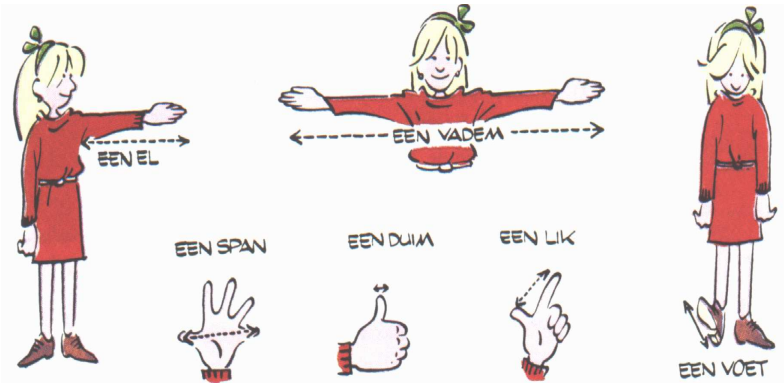
Er bestonden verschillende manieren om numerieke[7] resultaten voor te stellen: door bundelen, door strepen te kerven op een stuk hout of been, door knopen in een touw te leggen, door steentjes of schelpen in hoopjes van vijf opeen te stapelen . Dit leidde weer tot de invoering van speciale symbolen voor 5, 10, 20, enz. en we vinden inderdaad in de periode, waarin de geschrevengeschiedenis begint, zulke symbolen in gebruik.

Een vroeg voorbeeld van een kerfstok gaat terug tot het Oudere Stenen Tijdperk. In 1937 werd bij V*ě*stonice in Moravi*ë* de rib van een jonge wolf gevonden, ongeveer 20 cm lang, waarin 55 diepe kerven waren gesneden, de eerste 25 in groepen van 5. Dan volgt een kerf die tweemaal zo lang is en waarmee de rij van kerven eindigt; met een andere kerf, ook tweemaal zo lang als de eerste 25 kerven, begint een nieuwe reeks die tot 30 loopt.

[4] abstract : niet concreet
[5] kwalitatief verschil : b.v. een verschil in kleur (rood, groen, geel). Je kunt dit niet tellen.
[6] kwantitatief verschil : b.v een verschil in aantal appels . Je kunt dit tellen.
[7] numeriek : door getallen uitgedrukt

Deling begon daar waar behoefte was aan 'gedeelten' van hoeveelheden of dingen; bewuste breukenvorming kwam weinig voor. Bij Noordamerikaanse stammen bijvoorbeeld vinden wij slechts enkele uitdrukkingen voor breuken, en in bijna alle gevallen betreft dit $\frac{1}{2}$, al vindt men ook wel eens uitdrukkingen voor $\frac{1}{3}$ of $\frac{1}{4}$. Ook vindt men heel vroeg een merkwaardige voorliefde voor heel hoge getallen, iets dat misschien samenhangt met een al-te-menselijke drang om de grootte van kudden of van verslagen vijanden te overdrijven.

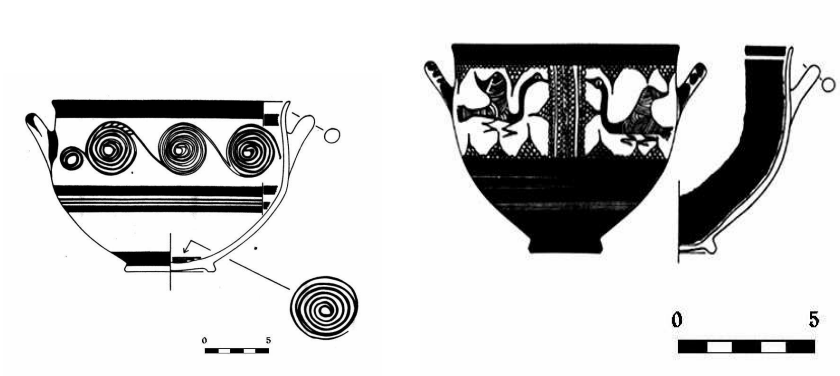
3) Men kreeg ook behoefte aan het meten van de lengte en de inhoud van voorwerpen. Daarvoor moesten zekere eenheden worden gekozen, die nogal onnauwkeurig waren, vaak delen van het menselijk lichaam, zoals vingers, duimen of voeten. Aan deze gewoonte worden we ook herinnerd als we woorden als el, span of vadem gebruiken.El staat in verband met elleboog, span is de breedte van de uitgestrekte hand (vgl. het woord omspannen), vadem is de afstand tussen de handen van de uitgestrekte armen (vgl. het woord omvademen).



Bij de bouw van huizen, zoals bij de landbouwende Indiërs of de paalbewoners van Centraal Europa, moesten regels worden vastgelegd waarmee men langs rechte lijnen en volgens rechte hoeken kon bouwen. Het woord 'recht' hangt samen met 'rekken', het woord 'lijn' met 'linnen', het Engelse woord 'straight' (recht) met het werkwoord 'stretch' (strekken); al deze uitdrukkingen wijzen op metingen met koorden of touwen.[8] Het woord 'linnen' wijst op een verband met het spinnen en weven.

De neolitische mens had ook een levendig gevoel voor meetkundige patronen. Het bakken en kleuren van aardewerk, het vlechten van bindwerk en manden, het weven van doeken en later het bewerken van metalen, leidde allemaal tot een versterking van het gevoel voor meetkundige patronen. We kunnen hier misschien ook dansfiguren aan toevoegen. Men treft in neolithische versieringen veel symmetrie[9] en gelijkvormigheid aan.

Interessante meetkundige patronen op aardewerk, op mandwerk en op geweven stoffen vinden wij op neolitische potten in Bosnië en op kunstvoorwerpen van de Ur-periode in Mesopotamië[10] (2000 v. Chr.), op Egyptisch aardewerk der voordynastische periode (4000-3500 v. C.), op voorwerpen gebruikt door paalhuis-bewoners bij Loebljanka (Joegoslavië 100-500 v. C.), en op vele andere plaatsen. Op urnen uitgegraven bij Sopron in Hongarije zien we rechthoeken waarin driehoeken en driehoeken waarin cirkels.



Myceense Vasen 1800 - 1200 v. Chr.

[8] In vele landen werden mensen, die metingen verrichtten 'touwspanners' genoemd, b.v. 'harpedonaptai' (Grieks), 'massah' (Arabisch), 'masihanu (Assyrisch).

[9] symmetrisch : spiegelbeeldig

[10] Mesopotami¨e : tegenwoordig is dit Irak

Zulke versieringen zijn door de jaren heen populair gebleven en worden zelfs tegenwoordig nog gebruikt. Men kan mooie voorbeelden vinden op de dipylon vazen uit de Minoische (Kreta) en archaisch-Griekse tijd (=oud-Griekse tijd, 1000 v. Chr.), in byzantijnse en Arabische mozaieken[11], of op Perzische en Chinese tapijten. [12]

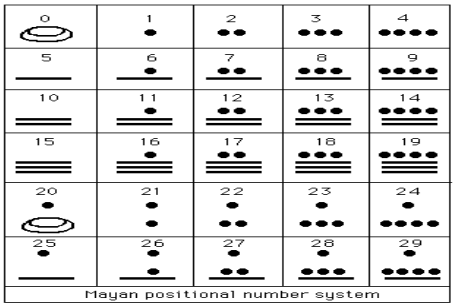
4) Zelfs bij volkeren met een primitieve cultuur vinden we een soort tijdrekening, veroorzaakt door een besef van de beweging van zon, maan en sterren. Door de uitbreiding van landbouw en handel begint deze kennis een meer wetenschappelijk karakter te krijgen. Zo ontstond een maankalender, doordat de veranderingen in de groei van gewassen in verband werd gebracht met de wisselingen van de maanstanden. Daarnaast ontwikkelde zich ook een zonnekalender, maar een nauwkeurige begrip van het verband tussen beide kalenders wordt pas veel later verkregen. Bij 'primitieve' volkeren vinden we ook wel belangstelling voor zonnewendingen of de opgang van de Plejaden[13] in de ochtenschemering, omdat deze dienst deden als gids bij de scheepvaart. Algemeen gesproken kan men zeggen dat uit deze prehistorische studie der hemellichamen enige kennis van bol en cirkel werd verkregen. Ook kwam er enig besef van ruimtelijke richtingen.

5) Hier is misschien een goede plaats om als overgang tot het volgende hoofdstuk iets te vermelden over de wiskunde van de Minoische-Myceense cultuur, die van de Maya's en de Inca's, culturen die nu slechts herinneringen zijn door nagelaten voorwerpen , teksten en monumenten, maar waarvan de invloed op het verdere verloop van de wiskunde minimaal geweest is. Toch blijft deze wiskunde voor ons interessant en leerzaam.

In de Minoische en Myceense ru$\ddot{i}$nes op Kreta en het Griekse vasteland zijn wiskundige symbolen voor administratieve doeleinden gevonden. Ze behoren tot de periode van circa 1800 tot 1200 v. C. Evenals in Egypte worden getallen additief[14] geschreven met symbolen voor 1, 10, 100, 1000 ; alhoewel de symbolen zelf wel verschillen. Ook voor eenvoudige breuken bestaan symbolen, er zijn geen *éé*nheidsbreuken zoals bij de Egyptenaren gevonden. De schrift is op kleitafeltjes als bij de Babyloni$\ddot{e}$rs, maar de klerken/ambtenaren bakten ze niet, zodat de enige tafeltjes die over zijn komen van de laatste brand die de paleizen heeft verwoest (als b.v. het zgn. paleis van Nestor). Het is dus niet bekend hoever de wiskundige vaardigheid van deze klerken ging.

De Maya's in Midden Amerika, speciaal in huidig Guatemala en Yucatan, bezaten een beschaving die meer dan duizend jaren heeft bestaan en haar hoogtepunt heeft bereikt in de zgn. klassieke periode, zo tussen 200 en 900 n. C. De arithmetica (rekenkunde) van deze Maya's is in hoofdzaak ontcijferd door de studie van hun gebeeldhouwde reli$\ddot{e}$fs[15] en Spaanse kronieken[16]. Ze stond in direct verband met het kalendersysteem, en dit hing weer af van hun sterrenkunde.

Het systeem was "vigesimaal", dus gebaseerd op 20 als eenheid. We vinden hier stippen voor getallen van 1 tot 4, horizontale streepjes voor de vijven tot 15, en voor grotere getallen een positiestelsel waarin machten van 20 worden voorgesteld door hetzelfde symbool als 20. Er kwamen variaties voor in verband met periode en kalenderstelsel. Een positiesysteem eist een symbool voor de nul, die werd aangegeven door een soort schelp of halfgeopend oog.



Mayan positional number system

[11] mozaiek : inlegwerk van steen, glas, enz.

[12] denk ook aan het werk van de Nederlandse kunstenaar M.C. Escher.

[13] Plejaden: een kleine groep sterren in het sterrebeeld Stier.
De naam schijnt afkomstig te zijn van het Griekse woord $\pi\lambda\varepsilon\iota\nu$ (varen)
De opkomst van de Plejaden in de morgenschemering kondigde het begin van de lente en daarmee het gunstige seizoen voor de zeevaart aan.

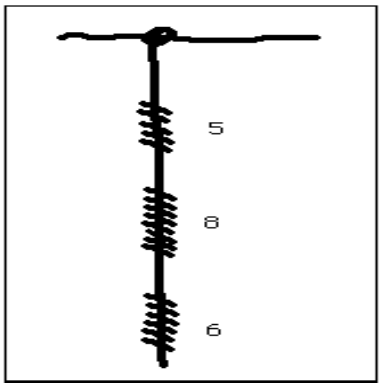
[14] additief : optellen

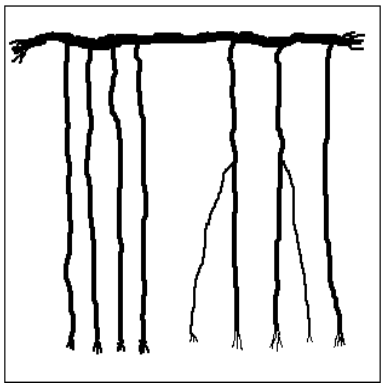
[15] reli´*ef* : uitspringend beeldwerk

[16] kroniek : boek met gedenkwaardige feiten

Deze soort arithmetica beinvloedde die van andere Zuid-Amerikaanse volkeren - een voorbeeld is de beroemde grote, ronde kalendersteen van de Azteken, nu in het Archeologische Museum in Mexico Stad - de Azteken kwamen in Mexico tegen het einde van de twaalfde eeuw (n.C.).

De Inca's beheersten een uitgestrekt rijk in het Andes-gebied, dat van het midden van de 13e eeuw tot de tijd van de Spaanse verovering drie eeuwen later bestond met hoofdstad Cuzco (nu in Peru). Zij waren bekwaam in administratie, hand- en kunstwerk, stedenbouw en ingenieurstechniek, en dit alles zonder een schrift ! Voor hun administratie gebruikten ze een rekenmethode en statistiek gebaseerd op de *quipu*. De eenvoudigste quipu bestaat uit een hoofdkoord van gekleurd katoen of wol, waaraan andere koorden met knopen hangen. Die knopen vormen groepjes van 1 knoop tot 9 knopen, en een groep van 4 knopen gevolgd door een van 9 en dan door een van 2 stelt het getal 492 voor. Hier hebben we dus een positiestelsel met de nul hier voorgesteld door een grotere afstand tussen knopengroepjes. De kleuren van de koorden kunnen voedsel, kleding, soldaten, enz. voorstellen. Er kunnen weer koorden van de vorige koorden afhangen, zodat men een tamelijk gecompliceerde statistiek kan bijhouden. Met die quipus kan ook gerekend worden, zelfs in tamelijk ingewikkelde processen.





Quipu's zijn gevonden met honderden koorden, de meest gecompliceerde quipu tot nu toe gevonden heeft 1800 koorden; ze kan de samenstelling van een leger, een werkkracht, een opslagplaats hebben voorgesteld. De Spanjaarden plachten de quipu's als heidense instrumenten te vernielen. De ongeveer 400 quipu's die we nu hebben, zijn in graven gevonden in woestijngebieden.

HET OUDE OOSTEN

1) Gedurende het vijfde, vierde en derde millennium[17] v.C. ontstonden nieuwe en meer ontwikkelde maatschappijvormen uit neolithische gemeenschappen die zich reeds eeuwen lang in subtropische of bijna subtropische gebieden langs de oevers van grote rivieren in Afrika en Azië hadden gevestigd. Deze rivieren waren de Nijl, de Tigris en de Eufraat, de Indus, en later de Ganges, de Hoang-ho en de Yang-tse.

De landerijen langs die rivieren konden overvloedige oogsten opleveren wanneer de rivieren onder controle waren gebracht en moerassen waren drooggelegd. In scherpe tegenstelling tot de woestijnen en berggebieden die deze gebieden omringden, konden de rivierdalen in een paradijs van vruchtbaarheid worden herschapen. Dit werd in de loop der eeuwen volbracht door het bouwen van dijken en dammen, het graven van kanalen en het aanleggen van reservoirs. De regeling van de watertoevoer vereiste samenwerking tussen de verschillende gemeenschappen, ook al lagen die een heel eind van elkaar verwijderd. Dit bracht centrale administratie-organen in het leven, die niet meer in primitieve dorpen, maar in *steden* lagen. Deze steden, op kruispunten van handelswegen in of ook buiten de administratieve centra, werden tegelijkertijd plaatsen waar de produkten van landbouw en veeteelt ter markt konden worden gebracht. Er ontstond een tamelijk hoog overschot van zulke produkten, dat niet alleen de algemene levensstandaard verhoogde, doch ook een stedelijke aristocratie[18] met machtige opperhoofden schiep. Er kwamen vele gespecialiseerde beroepen: handwerkers, soldaten, beambten, priesters. het beheer van de openbare werken werd in de handen van een blijvende bureaucratie geplaatst, een groep die verstand had van het gedrag van de jaargetijden, de bewegingen van hemellichamen, de kunst van het landmeten, het bewaren van voedingsmiddelen, of de heffing van belastingen. Gaandeweg ontstond een schrift waarin de handelingen van de bureaucratie en de daden van de opperhoofden konden worden beschreven en bewaard. Zulke handwerkers en bureaucraten verkregen langzamerhand heel wat speciale technische kennis, waartoe ook kennis van de metaalbewerking en van de geneeskunde behoorde. En zo begonnen ze ook de kunst van het rekenen en meten te beheersen.

De maatschappij in de tijd van deze opkomst van steden (men spreekt ook wel van een revolutie: *the urban revolution*) was ook langzamerhand in klassen gesplitst. Men had opperhoofden, vrije en pachtboeren, handwerkers, schrijvers en andere beambten, horigen en slaven.

2) Oosterse wiskunde ontstond als een praktische wetenschap, nuttig voor het berekenen van de kalender, het beheren van de oogsten, de organisatie van openbare werken en de inzameling van belastingen. Oorspronkelijk werd uiteraard op praktisch rekenen en meten de nadruk gelegd. Wanneer echter een wetenschap eeuwen lang beoefend wordt door een speciale groep mensen, die niet alleen de wetenschap toepassen maar ook haar geheimen aan leerlingen moet doorgeven, dan ontwikkelen zich neigingen tot grotere abstractie en tot wetenschap om der wille van de wetenschap. Rekenen ging zodoende over in algebra[19], meten ging over in theoretische meetkunde.

Het is moeilijk nieuwe ontdekkingen in het Oosten precies te dateren. Het statische karakter van de economische structuur draagt er toe bij dat een wetenschappelijk leergebied eeuwen lang weinig veranderingen ondergaat. Het komt voor dat ontdekkingen die in het isolement van *één* stadsgebied worden gemaakt, nooit verder doordringen of zelfs weer verloren gaan. Grote schatten in wetenschappelijke en technische kennis kunnen door dynastieke veranderingen, door oorlogen of natuurrampen verdwijnen. Zo vertelt men dat in het jaar 221 v. C., toen China voor het eerst onder de heerschappij van een absolute despoot, Sh*é* Hunag Di (Chhin Shih Huang T*é*, de eerste keizer van China) verenigd werd, alle leerboeken met uitzondering van sommige (b.v. over de geneeskunst) op 's keizers bevel werden vernietigd. Later, zo zegt men, werd heel wat van de verloren schatten uit het hoofd weer opgeschreven, maar men begrijpt hoe moeilijk onder zulke omstandigheden het dateren of zelfs het bewaren van ontdekkingen wordt.

[17] millenium : periode van 1000 jaar
[18] aristocratie : de voorname families van een land of een stad
[19] algebra : letterrekenen (bv. $5a + 6a = 11a$)


孫子算經序

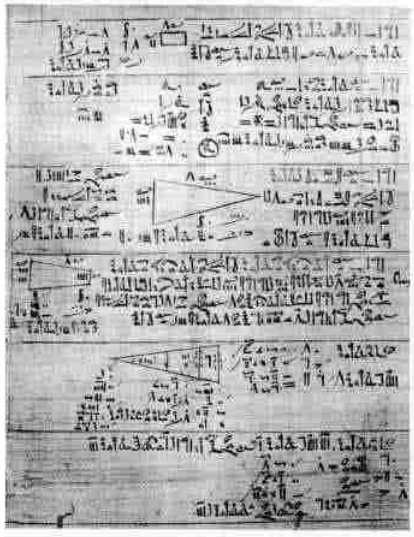
孫子曰夫算者天地之經緯萬生之元首五常之本末陰陽之父母星辰之建號三光之表裏五行之準平四時之終始萬物之祖宗六藝之綱紀稽叅倫之聚散考三氣之降升推寒暑之迭運步遠近之殊同觀天道精微之兆基察地理從橫之長短采神祇之所在極成敗之符驗窮道德之理究性命之情立規矩準方圓謹法度約尺丈立權衡平重輕剖毫氂析黍絫校


孫子算經卷上

甲寅讓太行王李淳風等奉勅撰 勅注釋

度之所起起於忽欲知其忽蠶吐絲爲忽十忽爲一絲十絲爲一毫十毫爲一釐十釐爲一分十分爲一寸十寸爲一尺十尺爲一丈十丈爲一引五十尺爲一端四十尺爲一疋六尺爲一步二百四十步爲一畝三百步爲一里稱之所起起於黍十黍爲一絫十絫爲一銖二十四銖爲一兩十六兩爲一斤三十斤爲一鈞

Een andere moeilijkheid bij het dateren van ontdekkingen in de Oosterse wetenschap komt voort uit het materiaal waarin de resultaten werden opgeschreven. De Mesopotamiërs gebruikten kleitafeltjes, die gebakken werden en praktisch onverwoestbaar zijn zolang zij in de puinhopen der oude steden onder de grond liggen. De Egyptenaren gebruikten papyrus, en veel hiervan is in het droge klimaat bewaard gebleven. De Chinezen en Indiërs gebruikten materiaal dat veel minder bestand was tegen de tand des tijds, zoals schors of bamboe. In het tweede millennium v. C. begonnen de Chinezen papier te gebruiken, doch er is weinig behouden van wat vóór 700 n. C. is beschreven. Onze kennis van de Oosterse wetenschap is dus uiterst gebrekkig, en voor de eeuwen vóór onze jaartelling zijn we bijna uitsluitend op materiaal uit Egypte en Mesopotamië aangewezen. . Er was een tijd dat onze rijkste historische bronnen uit Egypte kwamen, en dit was aan de ontdekking, in 1856, van de zgn. Papyrus Rhind te danken.[20] Deze Papyrus is omstreeks 1650 v. C. geschreven, maar bevat veel materiaal dat eeuwen ouder is.



De Papyrus Rhind is 6 meter lang en 0,4 meter breed.

[20] Zo genoemd naar de Schotse bankier en antiquair A. Henry Rhind (1833-'63), die de papyrus in Luxor aan de Nijl verkreeg. Ze bevindt zich in het Britse Museum, en wordt ook wel de Ahmes-papyrus genoemd, naar de klerk die de kopie maakte. Ahmes is de eerste persoonsnaam die we in de wiskunde kennen.